

# **Un nuovo metodo di calcolo della probabilità risk-neutral di default attraverso la calibrazione dai prezzi delle equity options**

## **Abstract**

*In questa ricerca viene proposto un nuovo metodo per il calcolo della probabilità risk-neutral di default di un'impresa e per il pricing e il risk management dei corporate bonds. Il modello si basa sulla calibrazione della volatilità del processo diffusivo degli assets utilizzando l'informazione contenuta nei prezzi delle equity option. In primo luogo viene definita la Asset Volatility Surface come l'insieme delle volatilità degli assets implicite nei prezzi delle opzioni con differente strike e maturity. Da quest'ultima viene ricavata la funzione di densità degli assets, che viene definita Assets Density Function. Inoltre, integrando la Asset Density Function è possibile ottenere la probabilità di default di un'impresa in funzione del suo Default Point e della volatilità degli assets, essendo il primo un indicatore del financial risk e il secondo del business risk. A differenza dei modelli in forma ridotta dove vengono utilizzati come input della calibrazione i prezzi dei titoli corporate, dei CDS e degli asset swaps, in questo modello vengono utilizzate le opzioni sull'equity a causa della loro maggiore liquidità rispetto agli altri strumenti.*

## 1. Introduzione

In questo paper proponiamo un modello per il pricing e il risk-management dei *corporate bonds*, estendibile ai credit derivatives *single name*, basato sulla calibrazione delle probabilità *risk-neutral* di default dai prezzi delle opzioni *plain-vanilla* scritte sull'equity. Nella pratica di mercato si segue generalmente l'approccio dei *reduced-form models* per cui il *pricing* avviene calibrando la *risk-neutral default probability* dai prezzi di mercato dei *credit derivatives* (*credit default swap*, *asset swaps*, *corporate bonds*, etc), eventualmente aggiustando tali probabilità con le frequenze storiche contenute nelle matrici di transizione, e quindi incorporando le informazioni relative al rating delle emissioni [vedi Jarrow, Lando & Turnbull (1997)].

Il problema che spesso si incontra riguarda la liquidità dei prezzi dei titoli usati nella calibrazione, e quindi la loro affidabilità. Infatti, per utilizzare i modelli in forma ridotta è necessario, per ogni emittente, calibrare la probabilità di default in funzione di un insieme di scadenze future in modo da ottenere una struttura a termine per la probabilità di default. Tale operazione non è agevole a causa della scarsità dei dati per singolo emittente. E' infatti improbabile che l'insieme dei credit derivatives e dei corporate bonds relativi all'impresa emittente possa coprire l'intero *range* della *spread curve*; inoltre molti contratti sono poco liquidi in quanto vengono scambiati con bassi volumi e ampi bid/ask spreads e quindi la significatività delle quotazioni ne è compromessa<sup>1</sup>. A questo si aggiunge una disponibilità di dati giornalieri individuali spesso molto scarsa<sup>2</sup>. Da queste considerazioni deriva la motivazione ad esplorare un nuovo metodo per estrarre dal mercato le informazioni sufficienti per calibrare il processo stocastico della dinamica degli assets. A tal fine vengono utilizzate le opzioni *plain vanilla* scritte sull'equity in quanto esse sono generalmente liquide ed ampiamente scambiate nei mercati *OTC*.

Migliorando la qualità degli input, si ottengono verosimilmente parametri che meglio rappresentano le aspettative del mercato sulla dinamica del valore degli asset dell'impresa e che quindi possono essere utilizzati più convenientemente nel pricing e nel risk management. L'output di questa ricerca è costituito dalla curva delle *default probabilities* (nel caso di default definito solo alla scadenza e fino alla scadenza) in funzione del livello di leverage (*financial risk*) e della volatilità degli assets (*business risk*) dell'impresa che emette il debito. Il calcolo della curva delle *default probabilities* avviene attraverso la calibrazione dei parametri relativi alla volatilità degli assets, il che richiede la definizione dei concetti di *asset volatility surface* (*AVS*) e di *asset risk-neutral density function* (*ARND*).

I modelli di pricing per i titoli credit sensitive possono essere suddivisi in due categorie: la prima deriva direttamente dall'impostazione di Merton (1973) dove il pay-off a scadenza in caso di default viene completamente specificato in modo endogeno [vedi anche Black and Cox (1976), e Shimko, Tejima and van Deventer

---

<sup>1</sup> Spesso tali quotazioni esposte da broker e non fanno seguito a transazioni realmente effettuate sul mercato.

<sup>2</sup> Questo avviene in quanto spesso le quotazioni dei titoli restano invariate per più giorni.

(1993)]. L'evento default inoltre deriva dall'evoluzione degli assets dell'impresa, modellata quest'ultima attraverso un processo diffusivo a parametri costanti. I modelli di questo tipo vengono definiti *structural model*, in quanto si basano su variabili strutturali (e quindi specifiche) dell'impresa emittente. Un'evoluzione di questa categoria è costituita da una serie di modelli che assumono il pay-off in caso di default come frazione esogena del valore nominale del titolo, mentre mantengono la natura endogena dell'evento default. Quest'ultimo può avvenire lungo tutta la vita dei titoli [p.e. Longstaff and Schwartz (1995), Saà-Requejo and Santa-Clara (1997)]. In questi modelli il processo degli assets si configura come *constrained diffusion with absorbing barrier*, dove la barriera può essere deterministica oppure stocastica. Infine, nella categoria dei *reduced-form models* si assume che il *recovery* e la *default (risk-neutral) probability* siano esogene all'impresa, mentre il *pricing* dei titoli avviene mediante la calibrazione delle probabilità da altri titoli già emessi dalla stessa impresa [p.e. Jarrow and Turnbull (1995), Jarrow, Lando and Turnbull (1997), Litterman and Iben (1991)].

Evidentemente la filosofia dei *reduced-form models* è completamente diversa da quella delle due categorie precedenti. I modelli strutturali si muovono in una logica di equilibrio, dove il prezzo dei titoli e la probabilità di default sono endogeni e rappresentano l'output dei modelli, mentre il valore di mercato degli assets dell'impresa e la sua volatilità sono gli input; essi interpretano il pricing dei credit derivatives secondo la teoria tradizionale della finanza. Al contrario, i modelli in forma ridotta applicano il concetto di *reverse-engineering*, cioè utilizzano i prezzi dei titoli più liquidi come input e restituiscono i parametri calibrati relativi al comportamento della variabile sottostante come output. La logica è dunque quella di assumere che sui mercati esistano una serie di titoli caratterizzati da elevata liquidità e da prezzi corretti (*plain vanilla*). In base a questi, si effettua il *pricing* di altri titoli più complessi (*exotics*) in modo coerente con i parametri inferiti dai primi.

In generale, il problema della costruzione di un modello per il *pricing* e il *risk-management* dei corporate bonds e dei *credit derivatives* è riconducibile alla specificazione dei seguenti elementi:

1. La forma e i parametri del processo che descrive la dinamica del valore dell'impresa emittente.
2. La probabilità di *default*
3. Il *recovery rate* in caso di default
4. Il metodo di stima dei parametri del modello

Riguardo al primo punto, la specificazione di una *Stochastic Differential Equation (SDE)* per rappresentare la dinamica del valore degli assets è un elemento tipico dei modelli strutturali, dove l'evento default è endogeno, mentre generalmente è assente nella letteratura relativa ai *reduced-form models*. Spesso la *SDE* prende la forma di una diffusione<sup>3</sup>, dove il valore degli assets segue una traiettoria continua senza possibilità di salti, oppure di un processo misto dove viene aggiunta una componente *jump* [vedi Zohu (1996)]. Inoltre, ipotizzando un mercato *arbitrage-free*, il drift del processo diffusivo è tale da rendere quest'ultimo *risk-neutral*, rispetto ad una misura di probabilità  $Q$  che rende martingale il processo dei prezzi. Va notato che in alcuni modelli [p.e. Saà-Requejo and Santa-Clara (1997)] e in questo paper non si assume

---

<sup>3</sup> Si definisce diffusione un processo di Markov continuo rispetto al tempo e con traiettorie continue.

che la misura martingala sia unica in quanto non si assume la completezza del mercato. In particolare, in questo paper il problema relativo alla non unicità della misura viene affrontato calibrando  $Q$  dal prezzo delle *equity options*. La volatilità della dinamica degli assets può essere specificata utilizzando un parametro costante, come nel processo GBM o di Ornstein e Ulembech, oppure può essere una funzione di variabili esogene, come nel modello proposto in questo paper.

Riguardo al secondo punto, la probabilità di default è definibile alternativamente nel caso che tale evento avvenga *solo* alla scadenza del debito, secondo una logica *à la Merton*, oppure in un qualsiasi istante *fino* alla scadenza, come ipotizzato per esempio in Black and Cox (1976), Longstaff and Schwartz (1995) e Saà-Requeio and Santa-Clara (1999). Nel primo caso, il titolo corporate viene interpretato come la combinazione di un'obbligazione *risk-free* e una posizione short su un'opzione put *plain vanilla* di tipo europeo, avente come sottostante il valore dell'impresa, come strike il valore nominale del debito e maturity pari a quella del debito. Nel secondo caso la probabilità di default si riferisce all'evento che il valore degli assets, durante tutta la vita del debito, tocchi la barriera  $L$ , che in questo modello poniamo pari al valore totale del *recovery*. L'opzione put si identifica in una *barrier option* di tipo *down-and-out*, con  $L < M$ , dove  $L$  è un *absorbing state* per il processo degli assets ed  $M$  è il valore nominale del debito.

Riguardo al *recovery* in caso di default, esso viene determinato endogenamente nell'approccio tradizionale di Merton e corrisponde al valore degli assets in caso di default utilizzabile per il pagamento del debito. Questo approccio diventa complesso quando viene applicato ad imprese con una struttura finanziaria non banale (p.e. con unico zero-coupon bond emesso). In Duffie and Singleton (1999) viene utilizzata la definizione di *recovery of market value (RMV)*, per cui il *recovery* alla data corrente è una frazione (conosciuta alla data corrente) del valore di mercato del titolo nello stato di non default. Una seconda definizione è quella di *recovery of face value*, per la quale il *recovery* è una frazione del valore nominale del debito *face value* del titolo). Infine Jarrow, Lando and Turnbull (1997) e Longstaff and Schwartz (1995) adottano la definizione di *recovery of treasury (RT)*, dove il *recovery* è una frazione del prezzo di un titolo *treasury* al momento del default. In questo paper, nel modello con default *fino* alla scadenza adottiamo quest'ultima definizione di *recovery*.

Infine, i parametri di un modello di pricing possono essere stimati in modo econometrico, utilizzando le serie storiche delle variabili osservabili, oppure mediante un procedimento di calibrazione. In genere, anche se non mancano importanti eccezioni, i modelli strutturali rientrano nella prima categoria mentre i modelli in forma ridotta nella seconda. La calibrazione è la procedura mediante la quale i parametri del modello vengono inferiti dai prezzi di altri titoli scambiati sul mercato, sotto l'assunzione di assenza di arbitraggio nell'economia. Sebbene quest'ultima sia oggi la procedura standard per il pricing dei *credit derivatives*, ci sono importanti fattori da considerare nella sua applicazione che verranno discussi nei paragrafi successivi.

Il modello che viene presentato unisce un elemento tipico dei modelli strutturali, cioè la specificazione della dinamica diffusiva degli assets dell'impresa, alla logica dei *reduced-form models* dove la probabilità di default e il *recovery rate* sono esogeni e

quindi calibrati dai prezzi di mercato. In particolare, le probabilità *risk-neutral* vengono ricavate, tramite un'opportuna trasformazione, dai prezzi delle opzioni sull'equity e, in base ad esse, viene calibrato il processo diffusivo degli assets dell'impresa. Questo modello evita lo svantaggio fondamentale connesso all'utilizzo dei modelli strutturali, riconducibile alla frequente impossibilità di osservare i parametri che specificano la dinamica del valore dell'impresa. Calibrando tali parametri dai prezzi delle opzioni si propone una soluzione al problema della scarsa liquidità dei *CDS*, *asset swap* e *corporate bonds* (e il relativo problema della costruzione delle curve), mantenendo comunque la natura *firm-specific* dei parametri ottenuti e quindi della metodologia di *pricing*. Questo paper propone quindi un modello *alternativo* di calibrazione, rispetto ai modelli attualmente utilizzati. L'assunzione principale su cui si fonda è l'assenza di arbitraggio tra tutti i titoli il cui valore dipende dagli assets di un'impresa, il che assicura l'esistenza di almeno una probabilità *risk-neutral*<sup>4</sup>. Inoltre, coerentemente a Saà-Requeio e Santa-Clara (1999), non viene ipotizzata la completezza del mercato e quindi l'unicità di tale probabilità. Il modello risulta utile per avere una *view* alternativa del valore dei *credit derivatives single name* rispetto ai prezzi di mercato.

---

<sup>4</sup> Vedi Harrison, J.M., Kreps, D.M. (1979), Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J.Econom.Theory* 20, 381-408.

## 2. I processi diffusivi e le *default probabilities* implicite nei modelli strutturali

In questo paragrafo viene analizzato il concetto di *Expected Loss* all'interno dei modelli di tipo strutturale, cioè modelli che definiscono l'equazione di pricing in funzione di variabili *firm specific* quali il valore, la volatilità degli assets e l'ammontare del debito. In particolare vengono discussi due aspetti che appaiono fondamentali nel determinare la forma della probabilità di default: 1) il tempo in cui può avvenire il fallimento e 2) la forma del processo diffusivo del valore degli assets. Riguardo al primo aspetto, viene analizzato sia il caso in cui il default possa accadere solo alla scadenza che il caso in cui possa accadere in qualsiasi momento della vita del debito; riguardo al secondo aspetto, viene discussa l'ipotesi di processo diffusivo degli assets con funzione di volatilità condizionata ad un set di variabili esogene, comparandola con l'ipotesi comunemente utilizzata nei modelli strutturali per cui il processo diffusivo è un *Geometric Brownian Motion (GBM)*.

Le probabilità alle quali si fa riferimento di seguito sono *risk-neutral* in quanto si ipotizza valida l'ipotesi di non arbitraggio tra i titoli scambiati sul mercato, mentre non viene utilizzata l'informazione contenuta nelle frequenze storiche risultanti dalle matrici di transizione. Se è vero che le probabilità *risk-neutral* inferite dai prezzi di mercato possono risultare poco robuste a causa della volatilità prodotta dalle condizioni di domanda/offerta contingenti, della spesso scarsa liquidità degli strumenti e dell'eventuale pricing inefficiente, diversi sono i motivi che spingono verso la loro adozione: a) hanno la proprietà fondamentale di includere tutto il set informativo a disposizione degli operatori alla data corrente<sup>5</sup>. Al contrario, le frequenze storiche che compongono le matrici di transizione sono calcolate con dati che appartengono al passato (spesso anche molto remoto) e per questo non utilizzano il set informativo corrente in modo ottimale; b) contrariamente alle matrici di transizione, sono *firm-specific*, cioè si riferiscono ad una singola impresa e non ad un *cluster* di imprese, evitando così il problema di associare un'unica probabilità di default ad imprese disomogenee; c) sono desunte dai prezzi ai quali avvengono effettivamente gli scambi, per questo rispecchiano pienamente le aspettative del mercato e sono coerenti con l'ipotesi di non arbitraggio.

Inizialmente viene discusso il modello di Merton (1973) in cui è presente la duplice ipotesi per cui l'evento default possa accadere solo alla scadenza del debito e il processo diffusivo degli asset segua un *GBM*. In seguito, seguendo l'approccio dei modelli di Longstaff e Schwartz (1995) e Saa Requeio e Santa-Clara (1999) ed altri, viene rilassata la prima ipotesi e discusse le relative conseguenze in termini di *recovery rate* e *default probability*. Infine rilassando anche l'ipotesi di diffusione *GBM* viene introdotta l'innovazione contenuta in questo paper, discussa nel modello di cui al paragrafo 3.

---

<sup>5</sup> Da questa proprietà consegue che le probabilità *risk-neutral* desunte dal mercato possono essere modellate come processi di Markov.

Nella maggior parte dei modelli strutturali la dinamica istantanea del valore degli assets di un'impresa,  $dV$ , segue una diffusione risk neutral di tipo *GBM*. Indicando con  $DP_T$  il *Default Point* dell'impresa, l'espressione:

$$P(V_t, T) = pr(V_T \leq DP_T | V_t) \quad (2.1)$$

indica la probabilità che il valore degli asset alla scadenza  $T$  sia inferiore o uguale al  $DP$ , condizionatamente al valore corrente degli assets  $V_t$ <sup>6</sup>. Data l'ipotesi di normalità della distribuzione di  $dz$ , otteniamo la *default probability* espressa in termini della distribuzione normale standard cumulata:

$$P(V_t, T) = N\left[-\frac{\ln \frac{V_t}{DP_T} + (r - \frac{\mathbf{s}^2}{2})(T - t)}{\mathbf{s} \sqrt{T - t}}\right] \quad (2.2)$$

L'argomento della (2.2), che indichiamo con  $d_2$ , è la differenza logaritmica tra il valore corrente degli assets al tempo  $t$  e il  $DP$ , espressa nella metrica della volatilità degli assets<sup>7</sup>. Il fatto che la distribuzione normale cumulata sia una funzione monotona crescente implica la sua biunivocità e quindi l'invertibilità, per cui è possibile associare ad ogni valore di  $d_2$  una ed una sola probabilità (*risk-neutral*) condizionata al set informativo corrente.

L'esempio più importante di modello strutturale dove il default è definito solo alla scadenza del debito e la dinamica degli assets è un *GBM* è quello di Merton (1974), dove il valore di un *zero-coupon corporate bond* equivale a quello di un *risk-free bond* meno un'opzione put scritta sul valore degli assets, avente come strike il valore nominale del debito  $M$  e come maturity la scadenza del debito  $T$ :  $v_t(T) = P_t(T) - Put_t$ . Il valore della put corrisponde all'*Expected Loss*, cioè alla perdita attesa legata all'investimento nel titolo *corporate* dovuta al possibile default. Nell'ambito del modello, il valore dell'opzione put è dato da:

$$Put_t = -N(-d_1)V_t - Me^{-r(T-t)}N(-d_2) \quad (2.3)$$

$$\text{con } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{Me^{-r(T-t)}}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{s}^2(T-t)}{\mathbf{s}\sqrt{T-t}} \text{ e } d_1 = d_2 + \mathbf{s}\sqrt{T-t}.$$

L'opzione put è il premio che l'investitore riceve per sopportare il rischio del default, quest'ultimo calcolato in base alla probabilità *risk-neutral*. L'esistenza e l'unicità di

---

<sup>6</sup> La (2.1) può essere espressa in termini di differenze logaritmiche  $P(V_t, T) = pr(\ln V_T \leq \ln DP | V_t)$  ed esplicitando il membro di destra otteniamo:  $P(V_t, T) = pr[\ln V_t + (r - \frac{\mathbf{s}^2}{2})(T - t) + \mathbf{s}e\sqrt{T-t} \leq \ln DP_T]$  e quindi:

$$P(V_t, T) = pr\left[\frac{\ln \frac{V_t}{DP_T} + (r - \frac{\mathbf{s}^2}{2})(T - t)}{\mathbf{s} \sqrt{T - t}} \leq -e\right]$$

<sup>7</sup> Nel modello KMV tale valore viene definito *Distance to Default*.

quest'ultima nel modello di Merton deriva dalle assunzioni di non arbitraggio e di mercato completo. E' possibile riscrivere la (2.3) nel seguente modo:

$$Put_t = \left[ -\frac{N(-d_1)V_t}{N(-d_2)} - Me^{-r(T-t)} \right] N(-d_2) \quad (2.5)$$

dove  $-\frac{N(-d_1)}{N(-d_2)}V_t$  è interpretabile come il valore atteso del valore di recupero degli assets condizionato all'evento default, mentre  $Me^{-r(T-t)}$  è il valore attualizzato del valore nominale del debito. La loro differenza dà il valore attuale della *Expected Loss Given Default (ELGD)*<sup>8</sup>. L'opzione put assume chiaramente il significato del *costo atteso del fallimento (Expected Loss)*, costituito dalla probabilità di default  $N(-d_2)$  moltiplicata per la *ELGD*.

Da un'ispezione della (2.5) è agevole trarre le seguenti conclusioni riguardo al valore del *recovery* a scadenza:

1. nei modelli dove si assume che il default possa avvenire solo alla scadenza del debito, il valore di *recovery* è una variabile casuale in quanto vi è incertezza sul livello degli assets anche al di sotto del *DP*. Quindi il suo valore atteso condizionato all'evento default è endogeno al modello, diversamente da altri modelli strutturali [p.e. Longstaff e Schwartz (1995), Saa Requeio e Santa-Clara (1999)], e dai modelli in forma ridotta [p.e. Jarrow-Turnbull (1995), Jarrow, Lando Turnbull (1997)].
2. Il valore atteso del *recovery* dipende dalle stesse variabili da cui dipende la probabilità di default e per questo ad essa deve essere correlato sotto la probabilità *risk-neutral*.

Va notato inoltre che la rappresentazione (2.5) dell'*Expected Loss* permette di rappresentare l'equazione di pricing di un *corporate bond* derivante da un modello strutturale nei termini tipici di un modello in forma ridotta [p.e. Jarrow-Turnbull 1995], data da:

$$v_t(T) = P_t(T) - ELGD \cdot PD \quad (2.6)$$

cioè dalla differenza tra il valore attuale di un *risk-free bond* e l'*Expected Loss* data dal prodotto tra *Expected Loss Given Default (ELGD)* e probabilità di default *PD*.

E' possibile generalizzare il modello di Merton (1973), coerentemente alla maggior parte dei modelli strutturali correnti, ipotizzando che il default possa accadere non solo alla scadenza del debito ma anche per tutto il periodo dall'emissione fino alla scadenza. La diffusione degli assets viene così vincolata all'esistenza di un *absorbing barrier*, un processo stocastico che indichiamo con  $L_t$ . La giustificazione economica è quella per cui gli obbligazionisti controllano l'andamento del valore degli assets dell'impresa durante la vita del debito; qualora quest'ultimo scenda al di sotto di  $L_t$ , essi non aspettano la scadenza per rivalersi sugli azionisti ma portano

---

<sup>8</sup> Vedi Crouhy M., Galai D. and Mark R., 2000, A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models, Journal of Banking and Finance, 24, 59-117.

subito l'impresa al fallimento. Indicando con  $V_t$  e  $L_t$  il processo diffusivo degli assets e della barriera, risulta conveniente calcolare la probabilità di fallimento in termini del rapporto  $X_t = \ln(V_t / K_t)$  (*distance to default*), il quale è un processo vincolato dalla barriera costante  $X_t = 0$ . La forma della probabilità di default dipende dal modo in cui vengono specificate le diffusioni  $V_t$  e  $L_t$ . Sotto l'ipotesi che  $X_t$  sia un *arithmetical brownian motion* a parametri costanti, la probabilità di default fino alla scadenza è data da:

$$P(\mathbf{t} < T, \mathbf{t} \in [t, T] | V_t) = 1 - N\left(\frac{X_t - \mathbf{m}(T-t)}{\mathbf{s}\sqrt{T-t}}\right) + e^{\frac{2\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}X_t} N\left(\frac{-X_t - \mathbf{m}(T-t)}{\mathbf{s}\sqrt{T-t}}\right) \quad (2.7)$$

dove  $\mathbf{t}$  è il *first hitting time* del processo  $X_t$ <sup>9</sup> e la (2.7) è l'integrale della funzione di densità  $\mathbf{j}(\mathbf{t})$  nell'intervallo  $[t, T]$ .

Va notato che nei modelli che specificano l'evento default come *first hitting time* il valore del *recovery* non è più generalmente una variabile endogena in quanto il valore degli assets non può scendere al di sotto della barriera. Per questo il *recovery* non dipende generalmente dal livello degli assets il che rende la rappresentazione della *Expected Loss* data dalla (2.5) non è più conveniente.

Il valore corrente del debito è rappresentabile, coerentemente ai *reduced form models*, come:

$$v_t(T) = P_t(T) - P_t(T)WP(\mathbf{t} < T_t, \mathbf{t} \in [t, T] | V_t) \quad (2.8)$$

dove  $P_t(T)W$  è la *LGD*, la cui natura stocastica dipende solo da  $P_t(T)$ , e  $P(\mathbf{t} < T, \mathbf{t} \in [t, T] | V_t)$  è la probabilità di default lungo l'intervallo  $[t, T]$ .

I modelli in cui si assume una dinamica diffusiva degli assets di tipo *GBM* implicitamente assumono che la distribuzione di densità a scadenza sia log-normale, contrariamente ad un'ormai consolidata evidenza empirica. In letteratura sono stati utilizzati due approcci concettuali per aggiungere flessibilità alla modellistica delle variabili finanziarie, nell'ottica di migliorare le equazioni di pricing: da una parte si è cercato di trovare distribuzioni più *aderenti* all'evidenza empirica, che possono incorporare i momenti superiori al secondo [per esempio vedi Jarrow and Rudd (1982)], dall'altro si sono cercati processi stocastici (diffusivi e non) alternativi al *GBM* [per esempio Ait Sahalia 2001]. Riguardo al primo approccio, sorge il problema di trovarne una distribuzione stabile, tale che sommando tali distribuzioni si ottenga la stessa forma, come avviene per la normale. La letteratura recente si muove lungo il secondo approccio, il quale è più generale del primo in quanto permette di modellare la variazione istantanea della variabile e quindi di ottenere una distribuzione per qualsiasi scadenza. Inoltre in questo approccio è possibile esprimere il drift e la volatilità della variazione istantanea di una variabile come

---

<sup>9</sup> La (3.7) è uno dei pochi esempi in cui è possibile esprimere la distribuzione di probabilità di  $\mathbf{t}$  in forma esplicita, il che avviene in genere quando il processo diffusivo sottostante è specificato con parametri costanti.

funzioni *time and state dependent* ed aggiungere eventualmente ulteriori disturbi casuali compreso le componenti *jump*, il che conferisce molta flessibilità nella forma della distribuzione a scadenza. Infine va notato che specificando una diffusione è possibile calcolare l'impatto di una variazione del drift e della volatilità sulla forma della distribuzione a scadenza.

Coerentemente alla seconda impostazione, in questo lavoro rappresentiamo la dinamica del valore degli assets di un'impresa mediante un processo diffusivo in cui la volatilità viene condizionata ad un dato livello di strike e maturity delle opzioni scritte sull'equity, con l'obiettivo di calibrare la *equity volatility surface*. Nei paragrafi seguenti viene mostrato come effettuare tale calibrazione e, attraverso il calcolo della distribuzione di densità degli assets per una data scadenza, viene specificata la probabilità di default in modo che possa essere inserita in un modello di pricing per *corporate bonds*.

### 3. Il modello

Consideriamo un mercato  $M$  composto dai prezzi dei seguenti titoli relativi all'impresa  $j$ , osservati alla data corrente  $t$ : l'equity  $S_t$ , un set di prezzi di opzioni scritte su  $S_t$  con diversi strike e maturity,  $C_t^S = \{C_{K,t}^S\}_{K=1,\dots,N;t=1,\dots,T}$  e un risk-free bond con scadenza in  $T$ ,  $P_t(T)$  che funge da numerario. L'obiettivo del modello è stimare il prezzo  $n_t(T)$  di un *zero-coupon corporate bond* (con scadenza in  $T$ ) coerente con i prezzi osservati sul mercato  $M$ , in base della comune dipendenza dal valore economico degli assets  $V_t$ . La dinamica di  $S_t$ ,  $C_t^S$  e  $n_t(T)$  è esprimibile come trasformazione della dinamica di  $V_t$  attraverso il lemma di Ito, il che implica che le relative equazioni di pricing possano essere espresse in funzione del valore e della volatilità degli assets. Ciò giustifica la seguente assunzione:

*Assunzione 1. L'equity è un'opzione call sugli assets di un'impresa emittente; il debito zero-coupon equivale ad una posizione lunga su un titolo (zero-coupon) risk-free e una corta su un'opzione put scritta sugli assets. Le equity options sono compound-options in quanto il loro sottostante, l'equity, è a sua volta un'opzione sugli assets.*

L'interpretazione delle equity options come *compound options* sul valore degli assets risale a Geske (1977). Questo comporta che le *equity options* contengono informazione rilevante relativamente ai parametri della diffusione degli assets. E' possibile rappresentare questa relazione attraverso la funzione composta  $C_t(V_t) = C_t(S_t(V_t))$  dove l'opzione call è una funzione composta del valore degli assets  $V_t$  attraverso il valore dell'equity  $S_t(V_t)$ . Tale relazione comporta che il modello sia *bi-periodale*:  $t$  è la data corrente,  $\mathbf{t}$  è la maturity dell'*equity option* e  $T$  è la scadenza del debito *zero-coupon*, con  $t \leq \mathbf{t} \leq T$ .

*Assunzione 2. Il mercato dei titoli è arbitrage-free ed esiste un set  $\Psi$  di misure neutre al rischio tali che il processo dei prezzi, in rapporto al prezzo di un zero-coupon risk-free bond, sia una martingala..*

Un'opportunità di arbitraggio viene definita come la possibilità di costruire alla data corrente  $t$  un portafoglio  $\mathbf{j} \in R^k$  tale che il valore corrente dell'investimento  $H$  sia zero,  $H_t(\mathbf{j}) = 0$ , ed esista una misura di probabilità  $Q$  tale che  $Q\{H_T(\mathbf{j}) \geq 0\} = 1$ . Il set  $\Psi$  contiene tutte le misure  $Q$  che rendono martingale i prezzi in rapporto al numerario. Il primo teorema fondamentale della finanza [Harrison and Kreps (1979)], data l'assunzione di non arbitraggio, assicura che il set  $\Psi$  contenga almeno una misura  $Q$  tale che  $G_t = p(t,T)E^Q[G_T p_T^{-1}(T)]$ , dove  $G_t$  indica un qualsiasi titolo scambiato in  $M$  e vale  $P_T(T) = 1$ . Se è vero che l'assunzione di non arbitraggio assicura l'esistenza di una misura  $Q$ , essa non ne assicura l'unicità; quest'ultima

condizione sarebbe soddisfatta solo se il mercato fosse completo, assunzione che non facciamo in questo paper.

**Assunzione 3.** *Il mercato è incompleto, cioè è impossibile replicare il pay-off di ogni strumento attraverso un portafoglio dato dalla combinazione di altri strumenti. Ciò equivale alla non unicità della misura  $Q \in \Psi$ .*

L'incompletezza deriva dall'impossibilità di conoscere quali e quante fattori di rischio influenzano la dinamica stocastica del prezzo dei titoli nell'economia. Se è vero che in genere è possibile rappresentare ogni fattore con un diverso processo di Wiener, a causa dell'ignoranza su tali fattori non riusciamo a specificare l'equazione del processo diffusivo per nessuno dei titoli in  $M$  (a parte il numerario). L'incompletezza del mercato comporta che, in base al secondo teorema fondamentale della finanza [Harrison and Pliska (1981)], esiste più di una misura  $Q \in \Psi$  tale che  $G_t = p(t, T)E_t^Q[G_T]$ . Un mercato incompleto non gode della proprietà di replicabilità di tutti i titoli che lo compongono, il che comporta l'impossibilità di valutare questi ultimi attraverso il costo del portafoglio di replica (*manufacturing cost*). In base a questo possono esistere più misure  $Q \in \Psi$ , tutte coerenti con l'ipotesi di non arbitraggio, che danno più prezzi per  $G_t$ . Più formalmente, in un mercato incompleto la non replicabilità di  $G_T$  corrisponde alla situazione in cui, fissato  $G_T$ , l'applicazione  $Q \rightarrow p(t, T)E_t^Q(G_T)$  che mappa dal set  $\Psi$  delle misure *risk-neutral* al set dei reali  $\mathbb{R}$  non è costante, cioè al cambiare della misura  $Q$  cambia il prezzo corrente del titolo. L'ipotesi di incompletezza si traduce quindi nell'impossibilità di individuare un unico prezzo per  $n_t(T)$  all'interno di quelli coerenti con l'ipotesi di non arbitraggio.

A questo punto, nell'impossibilità di individuare  $Q$  endogenamente al modello, risulta conveniente calibrare tale misura dal mercato (*reverse engineering*). Questo avviene generalmente osservando un set di prezzi  $G \in M$  e utilizzando la relazione  $G_t = p(t, T)E_t^{Q^*}[G_T]$  per stimare la misura  $Q^* \in \Psi$  implicita nei prezzi. Il metodo che proponiamo in questo paper viene esposto in dettaglio nei due paragrafi successivi. Va notato che il procedimento di *reverse engineering* ha senso se i prezzi dei titoli utilizzati hanno le seguenti caratteristiche: a) sono altamente liquidi, con alti volumi e bassi spread e b) esiste un modello standard di pricing comunemente accettato dagli operatori. Il punto a) è necessario perché i prezzi possano considerarsi espressione effettiva del *consenso* del mercato; il punto b) permette che vi sia consenso sui parametri calibrati, data l'osservazione dei prezzi.

In questo paper, sulla base delle considerazioni a) e b), poniamo  $G = C_t^S$ , cioè identifichiamo nelle *equity options* il set di titoli più adatto per calibrare la misura  $Q^*$ . Una volta calibrata dal set delle opzioni la probabilità  $Q^* \in \Psi$  relativa all'*equity*, è possibile ottenere quella per gli assets sfruttando la relazione funzionale tra *equity* ed *assets*. Il prezzo *arbitrage-free* di un corporate bond (generalizzabile a qualsiasi credit derivative *single name*), risulta così definito:  $v_t(T) = p_t(T)E_t^{Q^*}[p(V_T)]$ . Va notato che nelle variabili casuali continue  $Q^*$  viene opportunamente trasformata, in modo da

poter essere applicata a funzioni di variabili casuali. Questo accade quando si passa dall'equity agli assets.

L'inferenza di  $Q^*$  dal set delle opzioni  $C_t^S$  avviene invertendo l'equazione originaria di Black and Scholes (1973) che costituisce il metodo standard di mercato per il calcolo della *volatility surface* (vedi par. 4.1). Quest'ultima, sostituita nella formula di B&S al posto della volatilità costante, permette la stima di  $Q^*$  attraverso la funzione derivata del prezzo dell'opzione call rispetto alla strike. L'incompletezza del mercato e quindi l'impossibilità di costruire un modello di equilibrio si ripercuote sul fatto che la *volatility surface* non sia piatta, come invece accadrebbe se il mercato fosse completo (in un ambiente B&S). Ciò è dovuto alla presenza di fattori di rischio che influenzano il prezzo delle opzioni ma che non sono presenti nell'equazione di B&S. L'inversione di tale equazione permette il calcolo di una misura  $Q^*$  che non è esattamente quella prevista dal modello originario (log-normale), ma esprime il premio al rischio che il mercato associa ai prezzi delle opzioni in remunerazione dei fattori di rischio non previsti dal modello originario; questi sono tipicamente la natura stocastica della volatilità e dei tassi di interesse, insieme all'eventuale presenza di *jumps*. In questo modello non assumiamo di conoscere la natura e la quantità dei fattori di rischio, da qui l'impossibilità di replicare i titoli sul mercato. L'impossibilità di *hedging* dovuta all'incompletezza del mercato comporta un rischio da parte dei *traders* che viene remunerato attraverso un premio al rischio implicito nei prezzi.

*Assunzione 4. La misura di probabilità  $Q^*$ , calibrata dai prezzi delle opzioni invertendo il modello originario di B&S, incorpora un premio al rischio dovuto all'incompletezza del mercato e alla conseguente impossibilità di hedging.*

In pratica, il mercato utilizza l'equazione di B&S non come strumento di pricing ma come modello di *reverse engineering*, per la calibrazione della *volatility surface* e, in base a questa, della misura  $Q^*$ . Il processo di *reverse engineering* e la relativa calibrazione della misura  $Q^*$  individua una possibile soluzione al problema di scelta della misura  $Q$  all'interno del set  $\Psi$  delle misure coerenti con l'ipotesi di non arbitraggio. Il metodo di calibrazione proposto nei paragrafi successivi è finalizzato al fatto che la misura  $Q^*$  incorpori tutta l'informazione disponibile dai prezzi delle opzioni, utilizzando una logica simile al *Kernel gaussiano* per la stima di una funzione di densità. Questo viene fatto utilizzando la teoria di Breeden and Litzenberger (1978).

Il modello descritto sopra viene sviluppato in tre fasi successive, corrispondenti ai paragrafi 3.1, 3.2 e 4. Nel paragrafo 3.1 viene affrontato il problema della calibrazione della volatilità degli assets dalla volatilità implicita delle opzioni scritte sull'equity, ottenuta mediante l'applicazione del lemma di Ito per il calcolo della dinamica dell'equity. Si ottiene così l'*asset volatility surface (AVS)*, definita come la matrice di volatilità degli assets condizionate ai diversi valori degli strike e delle maturities delle equity options. Il paragrafo 3.2 ha come obiettivo il calcolo della *asset risk-neutral density (ARND)* come trasformazione della risk-neutral density relativa all'equity. Questo richiede la specificazione di un modello strutturale per esprimere l'equity come call option rispetto agli assets. Integrando la ARND da zero al *default point (DP)*, è possibile calcolare facilmente la probabilità di default. Infine nel paragrafo 4 la probabilità di default viene utilizzata per il pricing di un zero-coupon corporate bond. Viene discusso sia il caso in cui l'equity è un'opzione plain vanilla, sia il caso in cui è

una *barrier option* di tipo *down and out* rispetto agli asset. In conclusione, l'equazione di pricing di un zero-coupon bond emesso da un'impresa viene espressa in funzione del *DP* e della volatilità degli assets, espressione la prima del *financial risk* e la seconda del *business risk*.

### 3.1 Un metodo di calibrazione della volatilità implicita degli assets.

A partire dall'analisi di Merton (1973) si è sviluppata un'estesa letteratura sui metodi di inferenza del valore e della volatilità degli assets di un'impresa sfruttando l'informazione contenuta nei prezzi e nella volatilità delle azioni. Merton (1977) ha mostrato come sia possibile calcolare il costo dell'assicurazione sui depositi bancari (*deposit insurance*) interpretandolo come un'opzione put sugli assets della banca depositaria. Il punto importante nel modello di Merton e in quelli successivi [per esempio Ronn and Verma (1986), Duan (1994)] è la stima del valore e della volatilità degli assets utilizzando le osservazioni sul valore e sulla volatilità storica dell'equity e definendo un legame funzionale tra assets ed equity. In Ronn e Verma (1986) tale stima avviene risolvendo un sistema di due equazioni non lineari in due incognite per ogni data di valutazione. La prima delle due equazioni è la formula di pricing per l'equity del modello originario di Merton (1973), la seconda stabilisce la relazione tra la volatilità dell'equity e quella degli assets utilizzando il Lemma di Ito. Più recentemente Duan (1994) ha criticato l'approccio delle equazioni simultanee proponendo un'applicazione del metodo della massima verosimiglianza per la stima dei parametri della distribuzione degli assets.

Sfortunatamente i metodi di cui sopra si basano sull'ipotesi di stazionarietà del processo relativo alla dinamica dell'equity e sulla conseguente possibilità di inferirne i parametri dall'analisi delle serie storiche. Tale ipotesi non è confortata dall'evidenza empirica in quanto la volatilità dell'equity tende ad essere *time and state dependent* ed eventualmente a presentare un andamento stocastico. Inoltre l'informazione contenuta nelle serie storiche, e quindi nei parametri da esse stimati, non è completa nel senso che non include pienamente le aspettative degli operatori sulla futura evoluzione della variabile. Il metodo esposto di seguito cerca di superare i problemi relativi alla non stazionarietà delle serie storiche mediante l'utilizzo della volatilità implicita nelle opzioni scritte sull'equity (*volatility surface*). Esso è una procedura di calcolo che permette di mappare la *volatility surface* dell'equity in una matrice contenente le volatilità degli assets in funzione dello strike e della maturity delle *equity options*, che definiamo *asset volatility surface (AVS)*. Nel paragrafo successivo mostriamo come utilizzare la AVS per il calcolo della funzione di densità degli assets (e conseguentemente la probabilità di default) per data scadenza. I parametri stimati sono impliciti nei prezzi delle opzioni e quindi consistenti con essi sotto l'ipotesi di non arbitraggio tra strumenti aventi lo stesso *underlying asset*. Essi si basano su un set informativo completo e sono *forward looking*, nel senso che scontano le aspettative degli operatori sulla futura evoluzione della variabile.

Il punto di partenza è la costruzione della *volatility surface* dall'insieme delle volatilità implicite nelle opzioni *plain vanilla* scritte sull'equity dell'impresa *j*-esima, distinte

per strike e per scadenza, che indichiamo con la matrice  $\mathbf{s}_t^s = \{\mathbf{s}_s(K_i, \mathbf{t}_j)\}_{i=1..n, j=1..T}$ . Di seguito indichiamo con  $t$  la data corrente, con  $T$  la scadenza del debito emesso dall'impresa e con  $\mathbf{t}$  la maturity delle *equity options*. Interpolando la *volatility surface* si ottiene la funzione  $\hat{\mathbf{S}}_t^s(K, \mathbf{t}): R^+ \times R^+ \rightarrow R^+$ , con  $K \in [0, \infty)$  e  $\mathbf{t} \in [t, T]$ , interpretabile come il valore atteso alla data corrente, sotto una misura di probabilità  $Q$ , della volatilità istantanea futura media nell'intervallo compreso tra  $t$  e  $\mathbf{t}$ , condizionata ad un dato livello di strike  $K$ <sup>10</sup>. Essa è una misura di volatilità globale relativa all'intervallo  $[t, \mathbf{t}]$  e sintetizza l'informazione relativa alla volatilità locale nello stesso intervallo.

A questo punto è possibile definire un processo diffusivo per l'equity che contiene la volatilità implicita nel prezzo di un'opzione con maturity  $\mathbf{t}$  e strike  $K$ . In questo modo il processo viene calibrato rispetto alla volatilità implicita nei prezzi osservati. Associando ad ogni elemento della matrice  $\mathbf{s}_t^s$  un processo diffusivo si ottiene un processo condizionato alla volatilità implicita:

$$dS = Sr dt + S \mathbf{s}_s(K, \mathbf{t}) dz \quad (3.1)$$

dove  $\mathbf{s}_s(K, \mathbf{t}) \in \mathbf{s}_t^s$  è la volatilità implicita in un'opzione con strike  $K$  e maturity  $\mathbf{t}$ <sup>11</sup>. Il significato della (3.1) è quello di definire alla data corrente un modello per la diffusione degli assets in modo condizionato al set informativo utilizzato. Sfortunatamente set informativi diversi, dati in questo caso dai prezzi delle opzioni, portano alla stima di un parametro diverso di volatilità, nell'assenza di un metodo di scelta tra tali set. Da qui l'opportunità di condizionare il processo al set informativo utilizzato, per poi estrarre in un secondo momento un'informazione di sintesi (vedi paragrafo successivo).

Il passo successivo consiste nel calibrare il processo diffusivo degli assets rispetto alla *asset volatility surface*. Definiamo la dinamica degli assets come:

$$dV = Vr dt + V \mathbf{s}_v dz \quad (3.2)$$

Applicando il lemma di Ito alla (3.2), si ottiene la corrispondente diffusione dell'equity:

$$dS = \frac{\mathbf{J}S}{\mathbf{J}V} rV dt + \frac{\partial S}{\partial V} \mathbf{s}_v dz + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{J}^2 S}{\mathbf{J}V^2} (dV)^2 \quad (3.3)$$

Eguagliando i termini in  $dz$  della (3.1) e (3.3) è possibile stabilire la seguente relazione tra la volatilità implicita dell'equity e la volatilità degli assets:

<sup>10</sup> Le volatilità implicite sono ricavate dai prezzi delle opzioni *plain vanilla* invertendo il modello di Black & Scholes (1973), e segnalano la non corrispondenza dei prezzi di mercato con quelli prodotti dal modello, per il quale la volatilità del sottostante è costante sia rispetto allo strike che alla scadenza; questo comporta la non accettabilità dell'ipotesi di distribuzione log-normale del sottostante e quindi la necessità di ricercare un'alternativa che sia quanto più possibile coerente con la distribuzione implicita nei prezzi di mercato.

<sup>11</sup> In questo lavoro esprimiamo la *volatility surface* dell'equity in funzione del livello di *moneyness* dell'opzione, dato dal rapporto tra strike price e prezzo spot.

$$\mathbf{s}_v(K, t) = \frac{\mathbf{s}_s(K, t)S_t}{V_t \cdot \Delta(K, \mathbf{s}_v(K, t))} \quad (3.4)$$

dove abbiamo posto  $\frac{JS}{JV} = \Delta(K, \mathbf{s}_v(K, t))$ . La (3.4) definisce un operatore che mappa dall'insieme delle volatilità implicite dell'equity,  $\mathbf{s}_t^s$ , all'insieme delle volatilità implicite degli assets,  $\mathbf{s}_t^v$ . Definendo  $V_t$  e  $S_t$  come valori esogeni, la (3.4) è un'equazione in due incognite corrispondenti alla volatilità dell'equity e degli assets e quindi è adatta per esprimere una trasformazione della prima nella seconda. Essa richiede di specificare un modello strutturale che esprima l'equity  $S$  in funzione degli assets  $V$  e della volatilità  $\mathbf{s}_v(K, t)$ .

**Definizione 1:** In base alla (3.4), l'asset volatility surface (AVS) è la matrice i cui elementi sono costituiti dalle volatilità degli assets ottenute mediante trasformazione delle volatilità implicite nelle equity options, condizionatamente ad una relazione strutturale tra equity ed assets.

In sintesi, per calcolare la volatilità degli assets attraverso la (3.4) in funzione dell'equity è necessario avere:

1. una stima della *volatility surface* dell'equity
2. una specificazione dei valori  $S_t$  e  $V_t$
3. Un modello strutturale di riferimento che permetta di derivare il valore dell'equity da quello degli assets e di calcolare il delta.

Esattamente come avviene per la volatility surface dell'equity, è possibile interpolare i valori delle *assets volatilities* in corrispondenza dei diversi strikes e delle diverse scadenze delle opzioni, in modo da ottenere una funzione continua e derivabile:

$$\hat{\mathbf{s}}_v(K, t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \frac{K}{S_{t_0}} + \mathbf{a}_2 \left( \frac{K}{S_{t_0}} \right)^2 + \mathbf{a}_3 \left( \frac{K}{S_{t_0}} \right)^3 + \mathbf{a}_4 t \quad (3.5)$$

dove il fitting delle asset volatilities viene effettuato utilizzando un polinomio di terzo grado rispetto al rapporto  $\frac{K}{S_t}$  e di primo grado rispetto al tempo.

Il metodo di calibrazione della (AVS) è applicabile in modo generale al pricing degli *equity derivatives* di tipo europeo, sotto l'approccio di Geske (1977). In tale approccio l'equazione di pricing dipende esplicitamente dalla volatilità, dal valore degli assets e dall'ammontare del debito emesso dall'impresa sulla quale viene scritta l'opzione. Per calibrare il modello di Geske bisogna modificare l'equazione originaria sostituendo la AVS al parametro di volatilità costante. Il prezzo di un'opzione call con maturity  $t$  risulta così una funzione composta dello strike:

$$\hat{C}_t(K, t) = f(K, \hat{\mathbf{s}}_v(K, t), M, t, T, V_t) \quad (3.6)$$

Con la (3.6) esprimiamo il prezzo di un qualsiasi tipo di *equity option* di tipo europeo, ottenuto col metodo della calibrazione della AVS.

Va sottolineato che il modello di Geske (1997) introduce una filosofia di pricing alternativa rispetto a quella di B&S, essendone una generalizzazione. Infatti nel modello di Geske è possibile effettuare il pricing di tutte le opzioni che comunemente vengono valutate nell'ambiente di B&S tenendo conto della relazione che lega l'equity al valore degli assets dell'impresa, che manca nel modello di B&S. Il modello di Geske necessita comunque di un set maggiore di variabili di input, tra le quali compaiono due variabili non direttamente osservabili quali il valore degli assets e la loro volatilità, a differenza del modello di B&S dove l'unica variabile non osservabile è la volatilità dell'equity. Tuttavia abbiamo visto che la definizione e il calcolo della AVS permette di utilizzare il modello di Geske in modo calibrato, come avviene attualmente per il modello di B&S. Nel paragrafo successivo mostriamo che la teoria di Breeden & Litzenberger (1978) permette di stimare la funzione di densità degli assets e quindi la probabilità di default dell'impresa per una data scadenza, sfruttando l'informazione contenuta nel prezzo delle opzioni.

### *3.2 Il calcolo della Asset Risk-Neutral Density*

La funzione *asset volatility surface* (AVS) definita nel paragrafo precedente permette di calcolare la funzione di densità del valore degli assets di un'impresa, che definiamo *asset risk-neutral density* (ARND), in  $t \in [t, T]$  cioè per ogni scadenza  $t$  compresa tra la data corrente e la scadenza del debito. In particolare, la data  $t$  coincide con la maturity delle opzioni scritte sull'equity. La stima della ARND avviene applicando la teoria di Breeden e Litzenberger (1978) per il calcolo della funzione di densità risk neutral dell'equity a partire da un set di prezzi di *equity options* e trasformando in seguito tale funzione nella funzione di densità degli assets. A tal fine è necessario da una parte specificare un modello strutturale che leghi il valore dell'equity agli assets, dall'altra calibrare i parametri del modello in modo che venga rispettata la condizione di non arbitraggio tra i titoli scambiati nell'economia.

Il metodo proposto di seguito si suddivide in due fasi: nella prima viene stimata la funzione di densità risk-neutral dell'equity a partire dall'*equity volatility surface*, nella seconda la funzione di densità dell'equity viene trasformata in quella degli assets mediante la specificazione di un modello strutturale.

#### *Fase 1.*

In letteratura sono state studiate diverse tecniche per la stima della funzione di densità di una variabile finanziaria a partire da un set di prezzi di opzioni aventi tale variabile come *underlying asset*; esse si dividono in tecniche parametriche, semi-parametriche e non parametriche a seconda delle restrizioni a priori sulla forma della funzione di

densità. In questo lavoro<sup>12</sup> viene utilizzato un approccio non-parametrico basato sull'equazione di B&S modificata introducendo la *volatility surface* al posto della volatilità fissa del modello originario:

$$\hat{C}(K, \mathbf{t} - t) = \hat{C}(K, \hat{\mathbf{S}}_s(K / S_t), \mathbf{t} - t) \quad (3.7)$$

La (3.7) è la stima del prezzo dell'opzione call come funzione continua dello strike<sup>13</sup> ottenuta interpolando la *volatility surface* mediante un polinomio e sostituendo quest'ultimo al posto del parametro fisso. La (3.7) esprime in pratica un *reduced-form model* per il pricing delle opzioni, nel senso che esprime i prezzi non in una logica di equilibrio, come nel modello originario di B&S, ma come risultato del processo di calibrazione tramite la *volatility surface*. Essa è una funzione composta di  $K$  attraverso  $\hat{\mathbf{S}}_s(K / S_t)$  ed è decrescente e convessa se viene rispettata la condizione di non arbitraggio. Ponendo  $M = K / S_t$  e applicando la formula di Breeden e Litzenberger (1978)<sup>14</sup> consistente nel derivare due volte la (3.7) rispetto a  $K$  si ottiene la funzione di densità dell'equity moltiplicata per un fattore di sconto:

$$f_t^*(K, \mathbf{t} - t) = e^{r(\mathbf{t} - t)} \left\{ \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + \frac{2}{S_t} \frac{d\hat{\mathbf{S}}_s}{dM} \frac{\partial^2 C}{\partial K \partial \hat{\mathbf{S}}} + \frac{1}{S_t^2} \left( \frac{d\hat{\mathbf{S}}_s}{dM} \right)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial \hat{\mathbf{S}}^2} + \frac{1}{S_t^2} \frac{d^2 \hat{\mathbf{S}}_s}{dM^2} \frac{\partial C}{\partial \hat{\mathbf{S}}} \right\} \quad (3.8)$$

La (3.8) rappresenta la *risk-neutral density* dell'equity condizionata al valore di partenza  $S_t$ , per qualsiasi scadenza  $\mathbf{t} \in [t, T]$ , a partire dalla stima della funzione  $\hat{\mathbf{S}}_s(K, \mathbf{t})$ . Essa è una funzione composta dello strike  $K$  attraverso la funzione di volatilità implicita  $\hat{\mathbf{S}}_s(K / S_t)$  e la funzione di *moneyness*  $M = K / S_t$  che esprime lo strike in termini relativi al prezzo corrente dell'equity.

## Fase 2.

La seconda fase consiste nell'utilizzare la *risk neutral density* dell'equity, data dalla 3.8, per il calcolo della funzione di densità degli assets, una volta specificato un modello strutturale che lega le due variabili.

<sup>12</sup> Seguiamo il metodo di Ait-Sahalia (2001).

<sup>13</sup> La funzione call e la funzione volatilità implicita rispetto allo strike contengono la stessa informazione, e quindi una volta individuata una delle due è possibile ottenere l'altra.

<sup>14</sup> L'idea alla base della teoria di Breeden e Litzenberger (1978) è quella di poter esprimere la funzione di densità dell'equity attraverso la derivata seconda del valore di un'opzione call rispetto ad un insieme continuo di strike price. Infatti, data la rappresentazione del valore della call in termini della funzione di Greene:

$$C(K, \mathbf{t}) = e^{-r(\mathbf{t} - t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(S_t - K, 0) f^*(S_t) dS_t$$

dove  $f^*(S_t)$  è la risk-neutral density dell'equity al tempo  $\mathbf{t}$ , abbiamo che:

$$\frac{\partial^2 C(\mathbf{t} - t, K)}{\partial K^2} = e^{-r(\mathbf{t} - t)} f^*(S_t)$$

Dal punto di vista computazionale, per il calcolo di  $f^*(S_t)$  è necessario stimare un continuo di prezzi di mercato di opzioni rispetto allo strike.

Di seguito viene discusso sia il caso in cui il modello strutturale coincide con quello originario di Merton (1973), nel quale l'evento default è definito solo alla scadenza del debito dell'impresa, sia il caso più generale dove il fallimento può avvenire in qualsiasi istante dall'emissione del debito fino alla scadenza.

Nel modello originario di Merton (1973) l'equity viene espresso come un'opzione call di tipo europeo avente gli assets dell'impresa per sottostante, il valore nominale del debito per *strike* e la *maturity* coincidente con la scadenza del debito. In questo lavoro utilizziamo una versione trasformata del modello originario di Merton, sostituendo alla volatilità costante degli assets la funzione di volatilità implicita data dalla (3.7). Alla scadenza del debito  $T$ , se  $V_T > M$  agli azionisti converrà ripagare il debito ottenendo il pay-off  $V_T - M$ ; alternativamente, se  $V_T < M$  gli azionisti non ripagheranno il debito e verrà dichiarato il fallimento, ottenendo un pay-off pari a zero. Il pay-off degli azionisti alla scadenza del debito è dunque pari a  $\max[V_T - M, 0]$  e definisce la *final condition* della PDE di Merton-Black-Scholes, la quale insieme alle due *boundary conditions*  $S_t(0) = 0$  e  $\frac{S_t(V_t)}{V_t} \leq 1 \quad \forall t \in [t, T]$  dà l'equazione di pricing dell'equity alla data  $t$  di maturity delle opzioni:

$$S_t[V_t, \mathbf{s}_v(K, T - t)] = V_t N(d_1) - Me^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (3.9)$$

$$\text{con } d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t(K, T - t)}{M}\right) + \left(r + \frac{\mathbf{s}_v^2(K, T - t)}{2}\right)(T - t)}{\mathbf{s}_v(K, T - t)\sqrt{T - t}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \mathbf{s}_v(K, T - t)\sqrt{T - t}.$$

Nel caso più generale in cui l'equity venga interpretato come una *barrier option* di tipo *down and out*, il suo valore si azzerava non appena il valore degli assets tocca la barriera  $L$ . In questo paper la *default barrier*  $L$  è definita esogenamente al modello ed equivale ad una frazione del valore nominale del debito. Definiamo adesso  $V_L(s)$  il processo degli assets con *absorbing barrier* in  $L$ , con  $s \in [t, T]$ . La distribuzione marginale di  $V_L(T)$ , cioè la distribuzione al tempo  $T > t$  del processo  $V_L(s)$  con barriera in  $L$ , è una distribuzione mista nel senso che è composta da un punto di massa in corrispondenza del valore  $V(T) = L$  e una funzione di densità nell'intervallo  $(L, \infty)$ , posto  $V_L(t) > L$ .

Il valore dell'equity al tempo  $t < T$  è dato da:

$$S_t^{LO}[V_t, \mathbf{s}_v(K, T - t)] = e^{-r(T-t)} \int_0^{+\infty} \max[V_T - M, 0] \cdot I\left\{\inf_{t \leq s \leq T} V(s) > L\right\} h(V_{T:L}) dV_T \quad (4.0)$$

dove  $h(\cdot)$  è la funzione di densità della variabile  $V_L(T)$ . Abbiamo espresso la (4.0) come funzione composta dello strike delle equity options attraverso la funzione di volatilità implicita degli assets (vedi paragrafo 3.1). La soluzione della (4.0), posto che  $L < M$ , è data da:

$$S_t^{LO}[V_t, \mathbf{s}_V(K, T-t)] = S_t^{LO}[V_t, \mathbf{s}_V(K, T-t)] - \left( \frac{L}{V_t} \right)^{\frac{2(r - \frac{s_V^2(K, T-t)}{2})}{s_V^2(K, T-t)}} S\left[\frac{L}{V_t}, \mathbf{s}_V(K, T-t)\right] \quad (4.1)$$

La (4.1) è l'equazione del valore dell'equity come opzione *down-and-out* sugli assets dell'impresa, con  $L < M$ . Notiamo che la (4.1) analogamente alla (3.9) è una funzione composta dello strike attraverso la volatilità degli assets.

Date le (3.9) e (4.1), la *ARND* è ricavabile dalla seguente relazione:

$$f_V(\bar{V}_t, T-t) = f_S(K, T-t) \cdot \left| \Delta(\bar{V}_t, \mathbf{s}_V(K, T-t)) \right| \quad (4.2)$$

dove  $f_V(\bar{V}_t, T-t)$  è la funzione di densità degli assets,  $f_S(K, T-t)$  la funzione di densità dell'equity implicita nei prezzi dell'opzioni e  $\Delta(\cdot)$  è il delta dell'equity, funzione degli assets e dello strike. La sua forma analitica dipende dal modello strutturale specificato, e in particolare dalla funzione derivata della (3.9) e (4.1). La variabile  $\bar{V}_t$  nella (4.2) è il valore degli assets alla data  $t$  che eguaglia il valore dell'equity allo strike, per ogni possibile valore dello strike:  $\bar{V}_t : S_t(K, T-t) = K$ ,  $\forall K \in R$  con  $\bar{V}_t, K \in [0, \infty)$ . Risulta così definita la funzione  $g(K) : K \rightarrow V_t$ , la quale è biunivoca e quindi dotata di funzione inversa  $g^{-1}(V_t) : V_t \rightarrow K$ , il che assicura l'unicità del valore  $V_t$  per ogni valore di  $K$ <sup>15</sup>. Questo permette di riscrivere la (4.2) in funzione di  $V_t$ :

$$f_V(V_t, T-t) = f_S(g^{-1}(V_t), T-t) \cdot \left| \Delta(V_t, \mathbf{s}_V(g^{-1}(V_t), T-t)) \right| \quad (4.3)$$

che esprime la *ARND* alla data  $t$  in termini del valore degli assets. La (4.3) viene definita a seconda del modello strutturale utilizzato, il che implica un delta differente nella parte di destra dell'equazione. Nel caso del modello di Merton, il delta è la derivata della (3.9) rispetto a  $V_t$ , altrimenti nel caso in cui l'equity è una *barrier option* è la derivata della (4.1).

Il calcolo della probabilità risk-neutral di default si ottiene direttamente dalla (4.3) integrando la funzione di densità:

$$Q_V^*(t) = \int_0^L f_V(V_t, t) dV_t \quad (4.4)$$

dove  $L$  è il *Default Point*, inferiore al valore nominale del debito  $M$  nel modello con default *fino* alla scadenza del debito ed equivalente ad  $M$  nel modello di Merton. La forma funzionale della (4.4) dipende dal delta utilizzato nella (4.3) e quindi dal modello strutturale che rappresenta la dipendenza dell'equity dagli assets. La (4.4)

---

<sup>15</sup> La funzione  $K = g^{-1}(V_t)$  è iterativa il che non la rende esprimibile in forma chiusa rispetto a  $K$ . E' necessario pertanto calcolare tramite una procedura numerica i valori di  $V_t$  in corrispondenza dei valori  $K$ .

definisce una funzione che mappa dal set delle date future al set delle probabilità:  $Q_v^*(\mathbf{t}) : [t, T] \rightarrow [0, 1]$ , la quale esprime la curva delle *default probabilities*.

Possiamo concludere che, in base a questo modello, il calcolo della probabilità di default per l'impresa  $j$  richiede come input:

1. la *asset volatility surface (AVS)*, ottenuta mediante una trasformazione dell'*equity volatility surface*
2. il valore corrente degli assets  $V_t$ , il valore nominale del debito  $M$  e la *default barrier*  $L$ .

Questo permette di dare un'interpretazione economica precisa al concetto di probabilità di default, che si identifica come un indicatore di rischio dipendente da due variabili causa: l'indebitamento e la volatilità degli assets dell'impresa che emette debito. Ne consegue che la probabilità di default calcolata tramite la 4.3 è un indicatore particolarmente adatto del rischio specifico di un'impresa, in quanto esprime tale rischio in termini di variabili endogene all'impresa e quindi *firm-specific*. In particolare, il *Default Point* sintetizza il rischio finanziario dovuto al livello di leverage, mentre la volatilità degli assets rappresenta il rischio legato all'attività operativa.

## 4. Il pricing dei corporate bonds

Nel paragrafo 3 abbiamo assunto che, sotto l'ipotesi di assenza di arbitraggio, esiste un set  $\Psi$  di misure neutre al rischio  $Q$  tali da rendere il prezzo dei titoli scambiati martingale rispetto al numerario  $P_t(T)$ , dato da un *risk-free bond* con scadenza in  $T > t$ . In presenza di mercati incompleti il set  $\Psi$  contiene più di una misura, il che comporta l'esistenza di più di un vettore di prezzi di equilibrio. Nel paragrafo precedente abbiamo calibrato la misura  $Q^* \in \Psi$  dai prezzi delle *equity options*, assumendo che essa renda martingale i processi dei titoli scambiati in rapporto al numerario. In particolare dalla (3.8) abbiamo ottenuto la probabilità relativa all'*equity*, che indichiamo con  $Q_s^*$ ; abbiamo poi trasformato la probabilità  $Q_s^*$  in quella relativa agli *assets*,  $Q_v^*$ , rendendo così possibile calcolare il prezzo di equilibrio di un *zero-coupon corporate bond* (e in generale dei *credit derivatives single name*). Di seguito utilizziamo la notazione  $Q^*$  per indicare la misura calibrata che già incorpora la trasformazione rispetto allo strumento a cui viene applicata.

Indichiamo con  $v_t(T)$  il prezzo di un *zero-coupon corporate bond* dal valore nominale unitario con scadenza in  $T > t$ , tale che il suo pay-off a scadenza sia  $v_t(T) = 1 - W_T$ , dove  $W_T$  è la variabile casuale indicante la perdita in caso di default, con  $W_T \in [0,1]$ <sup>16</sup>.

Assumiamo che la misura calibrata  $Q^*$  è tale che:  $E_t^{Q^*} \left[ \frac{n_T(T)}{p_T(T)} \right] = \frac{n_t(T)}{p_t(T)}$ , cioè rende il

processo  $\frac{n_t(T)}{p_t(T)}$  una martingala, con  $t \leq T$ . Posto che  $p_T(T) = 1$ , abbiamo che

$v_t(T) = p_t(T) E_t^{Q^*} [n_T(T)]$  che possiamo riscrivere come  $v_t(T) = p_t(T) E_t^{Q^*} [1 - W_T]$  e quindi:

$$v_t(T) = p_t(T) - p_t(T) E_t^{Q^*} [W_T] \quad (4.5)$$

La (4.5) permette di scomporre il prezzo di un titolo *corporate* nel prezzo di un investimento *risk-free* e nel valore che compensa l'investitore per la possibile perdita dovuta al default, dato dall'*Expected Loss* attualizzato. La misura  $Q^*$  è definita come *forward risk-neutral* in quanto utilizza  $p(t,T)$  come numerario anziché il *bank-account* (come avviene per la misura *risk-neutral*). Questo permette di esprimere la (4.5) senza il termine di correlazione tra tasso *risk-free* e valore degli *assets*, eliminando così il conseguente problema di stima.

Nell'ipotesi in cui il default possa accadere *solo* alla scadenza del debito, l'*Expected Loss* nella (4.5) equivale ad un'opzione put *plain vanilla* sugli *assets*, coerentemente al

---

<sup>16</sup>  $W_T = 0$  in corrispondenza dell'evento di sopravvivenza e  $W_T \in (0,1]$  in caso di default.

modello originario di Merton. Sapendo che la perdita dovuta al default è data da  $W_T = \max[M - V_T, 0]$ , abbiamo:

$$v_t(T) = p_t(T) - p_t(T) E_t^{Q^*} [\max[M - V_T, 0]] \quad (4.6)$$

ed esplicitando l'aspettativa abbiamo:

$$n_t(T) = p_t(T) - p_t(T) \int_0^\infty \max[M - V_T, 0] f^{Q^*}(V_T | V_t) dV_T \quad (4.7)$$

La (4.7) permette di generalizzare l'equazione di Merton in cui la funzione di densità degli assets è log-normale, utilizzando la distribuzione non parametrica  $Q^*$  ottenuta dalla (4.3). Il pricing dell'opzione put e quindi del corporate bond è così coerente con i prezzi di mercato delle opzioni sull'equity, evitandosi così possibilità di arbitraggio tra diversi strumenti che derivano il loro valore dagli assets dell'impresa.

Nel caso in cui il default possa accadere prima della scadenza di debito, l'*Expected Loss* è sempre calcolabile attraverso la 4.5, la quale tuttavia necessita di ulteriori specificazioni. Gli obbligazionisti provocano il default dell'impresa *non appena* il valore degli asset tocca la barriera  $L$ , nel quale caso assumiamo che in totale ottengano lo stesso valore  $L$  come *recovery*. Ipotizzando *a priori* un tasso medio di perdita  $W$  in caso di default, e ponendo  $d = 1 - W$  come *recovery rate* medio, risulta determinato il *recovery totale* e quindi il livello della barriera  $L$ , dato da  $L = d \cdot M$ , dove  $M$  è il valore nominale del debito. Utilizzare il parametro fisso  $W$  al posto della variabile casuale  $W_T$  significa assumere conosciuto a priori un tasso di perdita in caso di default. Il fatto di ipotizzare un valore della barriera esogeno evita di complicare l'analisi includendo un possibile comportamento strategico tra azionisti e obbligazionisti.

L'introduzione di  $L$  come *absorbing-barrier* genera incertezza sul tempo di accadimento del default, il quale è rappresentabile attraverso la variabile casuale  $t$  adattata al set informativo  $\mathfrak{S}_t$ <sup>17</sup> che rappresenta il *first-hitting time* del processo

$X_t = \ln\left(\frac{V_t}{L}\right)$  rispetto alla barriera 0. Ciò significa che, posto che il debito abbia scadenza in  $T$ , viene definito come default l'evento per il quale il processo  $X_t$  tocca il livello  $X_t = 0$ , per qualsiasi  $t \in [0, T]$ ;  $X_t$  è quindi un processo stocastico diffusivo, vincolato dall'esistenza di un *absorbing barrier* in  $X_t = 0$ <sup>18</sup>.

Il prezzo del *corporate bond*, in base alla (4.5) è esprimibile come:

$$v_t(T) = p_t(T) - p_t(T) \cdot E_t^{Q^*} [W 1_{\{t < T\}}]$$

<sup>17</sup> Dire che la variabile casuale  $t$  è adattata al set informativo  $\mathfrak{S}_t$  significa ipotizzare di conoscere, in ogni istante di tempo, se l'evento default si è verificato o meno.

<sup>18</sup> Più formalmente, la variabile casuale  $t$  è rappresentabile nel modo seguente:  
 $t^* = \inf \left\{ t \in [0, T] : \frac{V_t}{K_t} = 1 \right\} = \inf \{ t \in [0, T] : \ln(V_t / K_t) = 0 \}$

dove  $W$  non è una variabile casuale come nella (4.6) ma un input esogeno al modello. L'equazione precedente equivale a:

$$v_t(T) = p_t(T) - W \cdot p_t(T) \cdot Q_t(\mathbf{t} < T, \forall \mathbf{t} \in [t, T]) \quad (4.8)$$

dove è stato possibile porre:  $E_t[1_{\{\mathbf{t}^* < T\}} W] = W Q_t(X_t \leq 0, \forall t \in [0, T])$ , dove  $1_{\{\mathbf{t}^* < T\}}$  è la funzione indicatrice dell'evento default ad una data precedente a  $T$ .

Sapendo che  $W = 1 - \mathbf{d}$ , si può riscrivere la (4.8) esattamente nei termini di Jarrow, Lando e Turnbull (1997):

$$v_t(T) = p_t(T) [1 - (1 - \mathbf{d}) Q_t(\cdot)]$$

dove  $Q(\cdot)$  viene stimata tramite la (4.4).

## *Bibliografia*

Y. Ait-Sahalia, A. Lo,  
Non parametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices  
Journal of Finance, pp. 499-547 Aprile 1998, Vol.53 n.2.

Y.Z. Bergman, B.D. Grundy and Z. Wiener  
General Properties of Option Prices  
The Journal of Finance, vol. LI, NO. 5, December 1996.

Black F., Cox J.,  
Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions,  
J. Finance 31, 351-367, 1976.

Breeden D., Litzenberger R.,  
The Pricing of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices,  
Journal of Business 51, pp. 621-51, 1978

Crouhy M., Galai D. and Mark R.,  
A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models,  
Journal of Banking and Finance, 24, 59-117, 2000

Duffie D. and Singleton K.,  
Modeling term structures of defaultable bonds,  
Review of Financial studies, Special 1999, 12, 687-720, 1999.

Geske R.  
The valuation of compound options  
Journal of Financial Economics, 7 1979

Harrison J.M., Kreps D.M,  
Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets  
J.Econom.Theory 20, 381-408,1979

Iben T. and Litterman R.,  
Corporate bond valuation and the term structure of credit spread,  
Journal of Portfolio Management, 17 Spring 1991, 52-64.

Jarrow R., Lando D. and Turnbull S.,  
A markov model of the term structure of credit spreads,  
Review of financial studies, 10 Summer 1997.

Jarrow R., Turnbull S.,  
Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk,  
Journal of Finance 50, 53-85, 1995.

Jarrow R.A., Wiggins J.B.

Option pricing and implicit volatility  
Journal of Economics Surveys, Vol.3. No.1

Longstaff F., Schwartz E.,  
A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt,  
Journal of Finance, 1995, 50, July, 789-819.

Merton, R.C.,  
On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates.  
J. Finance 1974, 29, 449-470

Pliska, S.R.,  
Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.  
Blackwell Publishers, Oxford, 1997.

Prigent J.L., Renault O., Scaillet O..  
An empirical investigation into credit spread indices  
Journal of Risk

Ronn E., and Verma A.,  
Pricing risk-adjusted deposit insurance,  
The Journal of Finance, 41, September, 871-95, 1986.

Saà-Requeio J., Santa Clara P.,  
Bond pricing with default risk,  
Working paper, UCLA, Los Angeles, 1997.

Shimko D., Tejima N., Van Deventer D.,  
The pricing of risky debt when interest rates are stochastic,  
The Journal of Fixed Income, September 1993, 58-65.

Zhou C.,  
A jump-diffusion approach to modelling credit risk and valuing defaultable securities,  
Working Paper. Federal Reserve Board, 1997.